Richtungsfelder von Differentialgleichungen

Jakob Christoph Vogler
Mat.Nr. 269909, IP2
14. Juni 2022

Einleitung

Differentialgleichungen sind Gleichungen, welche aus einer unbekannten Funktion und Ableitungen dieser bestehen. Sie beschreiben das Änderungsverhalten verschiedener Größen zueinander. Man findet Differentialgleichungen in der Physik, Medizin, Psychologie, und vielen weiteren wissenschaftlichen, technischen, und wirtschaftlichen Bereichen. Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung beschreibt die Steigung an den Stellen $(x_n \mid y_n)$. Eine Isokline ist eine Kurve, welche an jeder Stelle der Kurve die gleiche Steigung abbildet, also z.B. alle Punkte der Steigung 1 miteinander verbindet.

Dieser Artikel zeigt die Vorgehensweise und das implementierte Programm zur grafischen Darstellung eines solchen Richtungsfeldes, dessen Linienelemente, und einiger zugehörigen Isoklinen für ausgewählte Differentialgleichungen. Des Weiteren ist in diesem Programm ein Eingabemenü, welches drei vorgefertigte Differentialgleichungen und eine Option zur benutzerdefinierten Eingabe beinhaltet, die grafische Ausgabe eines Koordinatensystems mit Beschriftung der Achsen, und eine Legende für die Isoklinen implementiert. In der Abgabe ist zusätzlich zu dem Quellcode auch eine JavaDoc Dokumentation enthalten.

Mathematische Grundlagen

Die höchste Ableitung der unbekannten Funktion in einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist die n-te Ableitung dieser Funktion. Im Folgenden die explizite Form.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Für diesen Artikel geht es nur um gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$y' = f(x, y)$$

Die Steigung an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$ kann entweder durch das Einsetzen von x in die Ableitung der relevanten Lösungskurve berechnet werden oder noch einfacher durch das Einsetzen von x_0 und y_0 in die Differentialgleichung selbst.

$$m = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

In Abbildung 1 ist ein grobes Richtungsfeld mit einigen Linienelementen an den Stellen $(x_n \,|\, y_n)$ mit der Steigung $f(x_n, y_n)$ zusehen. In Abbildung 2 ist eine zeichnerische Annäherung einer Lösungskurve dargestellt.

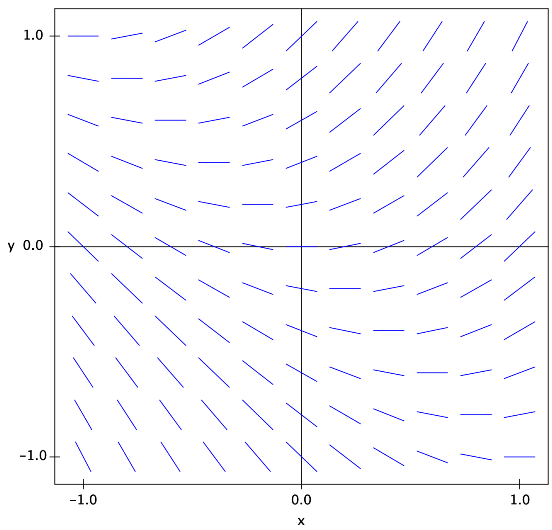

Abbildung 1: Richtungsfeld von $y'(x) = x + y(x)$

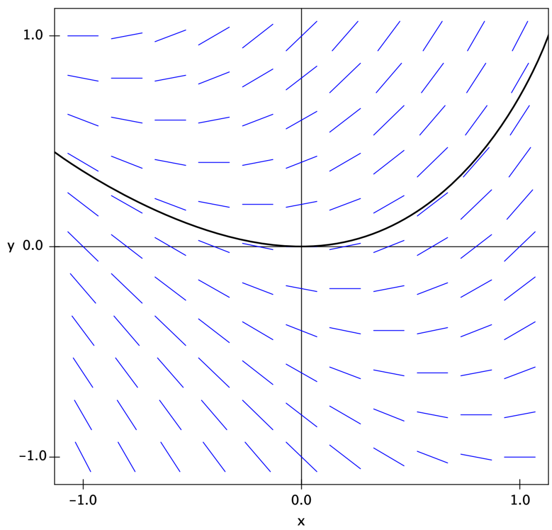

Abbildung 2: Richtungsfeld von $y'(x) = x + y(x)$ mit Lösungskurve

Isoklinen bilden an jeder Stelle die gleiche Steigung ab. Um eine generelle Funktionsgleichung für Isoklinen zu erhalten, muss man nach der Steigung auflösen (nicht jede Steigung bildet eine korrekte mathematische Funktion).

$$y' = f(x, y) = \text{const.} = c$$

Algorithmus

Das Programm ist für gewöhnliche explizite Differentialgleichungen ausgelegt, dabei ist es egal ob diese linear, nicht-linear, homogen, oder inhomogen sind. Das wichtigste Bauteil des Programmes ist die drawSlope() Methode. Sie berechnet die beiden Punkte, welche nötig sind um das Linienelement zu bilden, und zeichnet dieses danach grafisch ein. Um das ganze Richtungsfeld zu bilden, und da die drawSlope() Methode sich immer nur um ein Linienelement kümmert, wird die drawSlope() Methode in der draw() Methode in einer geschachtelten Schleife mehrmals aufgerufen. Folgende grundlegende Schritte durchläuft die drawSlope() Methode:

1. Berechnen der Steigung m durch Einsetzen von x und y in die DGL
2. Ermitteln des y-Achsenabschnitts b der Tangentengleichung
3. Bestimmen der Koordinaten zweier Punkte anhand der Tangentengl.
4. Grafisches Darstellen einer Verbindungsgerade, dem Linienelement

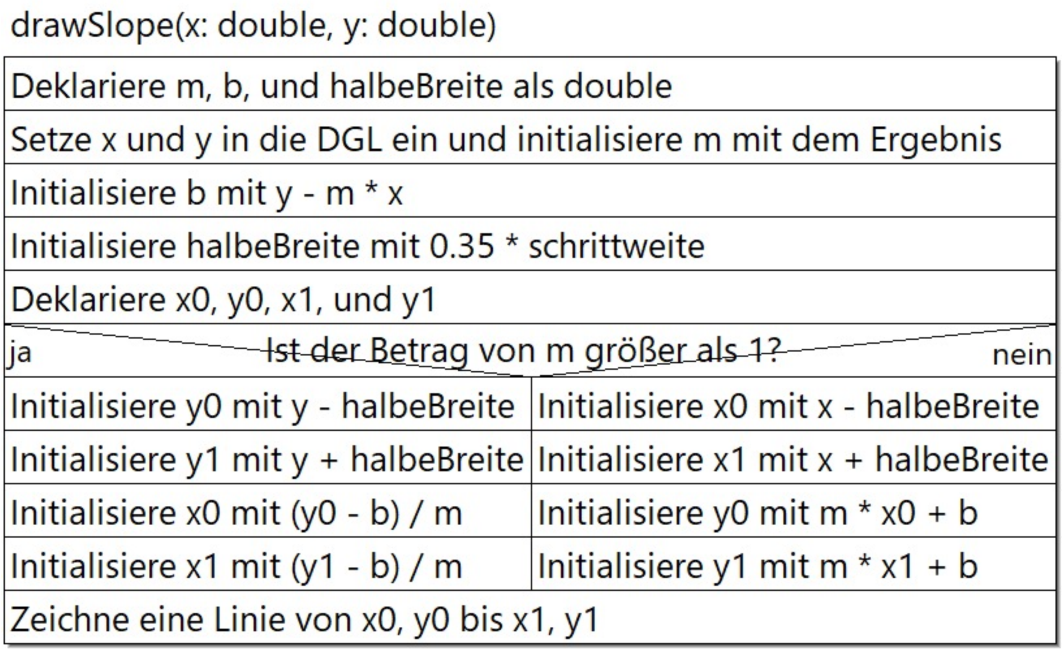

Abbildung 3: vereinfachtes Struktogramm der drawSlope() Methode

Programmbeschreibung

Die genaue Programmbeschreibung ist im beigefügten JavaDoc enthalten.

Beispiele

Beispiel 1 Die Differentialgleichung $y'(x) = x + y(x)$ soll grafisch ausgegeben werden. Die allgemeine Gleichung der Isoklinen lautet $y(x) = c - x$. Nach Eingabe der Gleichung ergibt sich die folgende Ausgabe in Abbildung 4.

Beispiel 2 Die Differentialgleichung $y'(x) = \dfrac{y(x) - x}{y(x) + x}$ soll grafisch ausgegeben werden. Die allgemeine Gleichung der Isoklinen für $c \neq 1$ lautet $y(x) = \dfrac{1 + c}{1 - c}x$. Nach Eingabe der Gleichung ergibt sich die folgende Ausgabe in Abbildung 5.

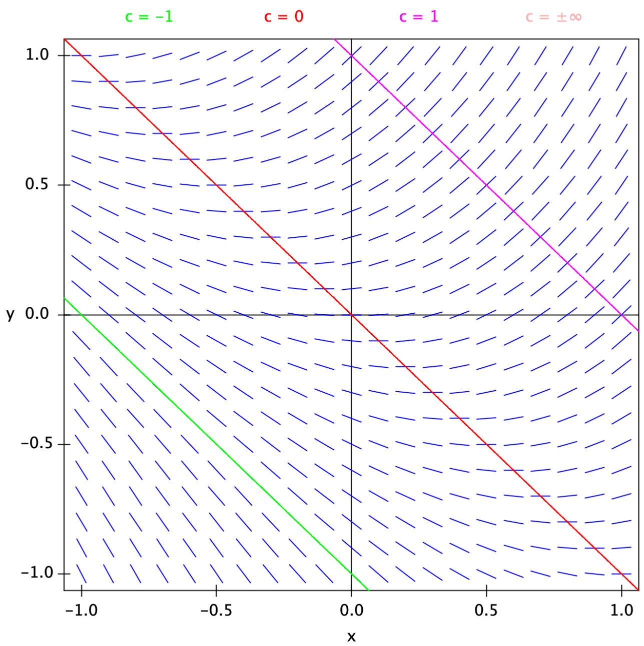

Abbildung 4

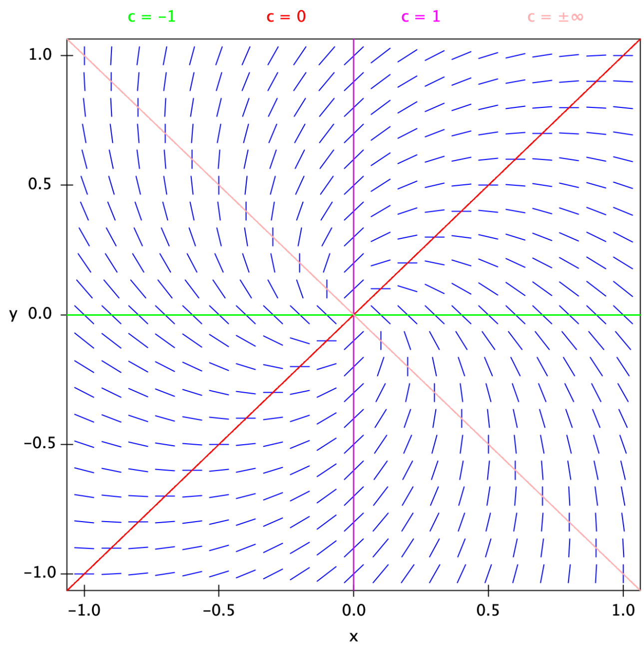

Abbildung 5

Literatur

[1] S. Dörn, *Vorlesungsscript Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Hochschulcampus Tuttlingen, 2022.

[2] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* (Band 2), Vieweg, 2015.